

Zertarako matematika?

JAVIER DUOANDIKOETXEA

EHUko Matematika Saileko irakaslea

ZIOfestan parte hartzera gonbidatu nindutenean baietz esan nuen. Gero, handik aste batzuetara festaren programa hartzean ikusi nuen neure hitzaldiaren izenburua: *Zertarako matematika?* Neuk hartu nuen lehen sorpresa, inork ez baitzidan izenbururik eskatu. Gero ere, inork ez zekien nork asmatu zuen izenburua. Matematika zertarako den galdetzeak zalantzaren bat erakusten du? Matematikariek beren jardueraren zergatia justifikatzeko beharra dute? Egia da jarduera batzuei ez zaiela normalean halako galderarik egiten, zerbaitetarako balioko dutela onartzen delako-edo. Balio izatea zer den, hor egon daiteke onarpenaren gakoa. Edozein modutan, matematika zein beste edozein jakintza-arlo zertarako den hausnartzea ona iruditzen zait, ofiziokoentzat eta kanpokoentzat. Eta itzuri ibili barik, azken urteotan galderari erantzuteko moduko hausnarketak behin baino gehiagotan egin behar izan ditudanez, nahiago izan nuen ZIOfesta hartan neure iritzia plazaratzea. Horixe da orain paperera dardana.

Matematikaren Nazioarteko Elkarateak eskatuta, Matematikaren mundu-urtea izendatu zuen Unescok 2000. urtea. Babesa agertzeko adierazpen bat plazaratu zuen eta askoz gehiago etorri ziren urte hartan, Parlamentu, Ministerio eta beste hainbat erakunde eta elkartetatik. Dena alde, denak alde. Benetan sortzen du matematikak zalantzarik? Behar du justifikaziorik? Adierazpenetako hitz hanpatuen sinatzaileetako batek baino gehiagok lasai asko botako zuen gero «nik matematikaz ez dakit ezer», Espainiako unibertsitate bateko errektoreak kongresu baten hasieran bota zuen moduan. Oso garrantzitsua omen da matematika, bai, baina gero jende kultuak lotsa handirik gabe aitor dezake ezer ez dakiela hartaz. Seguru nago beste ezjakintasun batzuek lotsak isilaraziko zizkiotela errektore jaunari.

Honek bi kulturen eztabaidara eramán gaitzake eta ez da hori nire helburua. Besteak beste, matematikak alderdi asko dituelako eta kritika guztiak ez datozelako «letretako» jendearen artetik.

Laguntza eske

Gaian sakon sartu aurretik egin dezagun irribarre bat. Matematikaren erabilera bitxi bat irakur dezakegu hurrengo pasartean:

Geometria testuak ikustean, irakurtzea benetan merezi zuenentz galdetzen zion bere buruari, eta liburu horietatik umore txarreko uneetan bota ohi zuen esaldi luze bat gorde zuen: 'Hipotenusa angelu zuzenaren aurreko aldea da triangelu errektangeluarrean'. Geroago esaldiak harridura sortarazten zien El Idilioko biztanleei eta ahokorapilo ergela edo ernegu erantzunezina bailitza hartzen zuten.¹

Luis Sepúlveda idazlearen *Un viejo que leía novelas de amor* eleberriko pertsonaiak erabilera bitxia aurkitu zion «hipotenusari». Eta egia da matematikarien esaldiek aho-korapilo itxura har dezaketela askotan, baina ez da zaila ekonomian edo biologian, esaterako, El Idilioko biztanleak harrituta uzteko moduko esaldiak aurkitzea.

Hurrengo testu zaharrak egiten duen matematikaren aldeko aldarrikapena hurbilago dago aipatu nahi ditugun arrazoietatik:

De los errores en las Matemáticas

En las matemáticas no ha podido haber depravación por ser doctrinas que consisten en verdadera demostración, hecha al sentido y experiencia, y no capaces de diversidad de opiniones y de pareceres. Pero ha caído otra desventura tan grande como ésta, si ya no es mayor, que por ser doctrinas que no son para ganar dinero, sino para ennoblecer el entendimiento, como los que estudian tienen más ojo al interés que a la verdadera doctrina, púsanse sin tocar en ellas. De donde viene gran daño a la república y particularmente al servicio de V. M., pues de no aprenderse matemáticas viene a haber gran falta de ingenieros para las cosas de la guerra, de pilotos para las navegaciones y de arquitectos para los edificios y fortificaciones, lo cual es en gran perjuicio de la república y deservicio de la majestad real y afrenta de toda la nación, pues en materia de ingenios ha de ir siempre a buscarlos a las extrañas naciones, con daño grave del bien público.

Aunque las Matemáticas no tuvieren en sí, como los tienen, tantos y tan grandes bienes y provechos, no hicieran otro bien sino habitar los entendimientos de los hombres en buscar en las cosas la verdad firme y segura y no dejarse bambolear de la inconstancia de las opiniones, que es lo que más destruye las doctrinas, sólo por este bien no se les había de permitir a los hombres pasar a ningún género de ciencia sin que aprendiesen primero las doctrinas matemáticas, que así lo sintió Platón cuando puso un rótulo en la puerta de su academia diciendo que no entrase allí el que no supiese matemáticas. Y así también lo sintió Aristóteles, pues en las demás ciencias trae ejemplos de las matemáticas, lo cual él no hiciera sino presuponiendo que los mancebos deben aprender ante todas las cosas las disciplinas matemáticas.

Este daño tan grave remediará fácilmente Vuestra Majestad mandando que las matemáticas se enseñen en lengua vulgar, como ya lo tiene dispuesto en la escuela que en su corte tiene hecha para ello y haciendo decreto que en las universidades y escuelas públicas ninguno sea admitido a ningún género de grado sin hacer primero demostración de cómo ha estudiado muy bien las disciplinas matemáticas.²

Pedro Simón Abril humanistak ikasketak berritzeko proposamena egin zion 1589an errege Felipe II.ari (*Apunta-*

mientos de cómo se deben reformar las doctrinas y la manera de enseñarlas...) eta matematikaz ari den zatia da hor doana. Alde bi ikusten dizkio interesgarri Simón Abrilek matematikari: balio praktikoa (gerran, nabigazioan, arkitekturan) eta burua erabiltzen erakustea. Ez dira arrazoi txikiak.

Unescoren adierazpenak matematikaren aldeko aldarrikapena egiteko aipatzen zituen lau puntuak ere ondo etorriko zaizkigu:

- Matematikak eta haren aplikazioek funtsezko garrantzia dute gaur egungo munduan zientzian, teknologian, komunikazioetan, ekonomian eta beste hainbat arlotan.
- Matematikak sustrai sakonak ditu kultura askotan eta milaka urtez pentsalari bikainen garrantzi handiko ekarpenek garatu dute.
- Matematikaren hizkuntza eta balioak unibertsalak dira, ezin egokiagoak nazioarteko elkarlana bultzatzeko.
- Prestakuntza matematikoa funtsezkoa da, batez ere lehen eta bigarren mailako hezkuntzan, bai matematikaren oinarrizko kontzeptuen ulermenerako, bai pentsaera razionalaren garapenerako.

Matematika bakoitzaren beharretarako

Gaur egun ez dugu geure inguruan inor aurkituko irakurtzen eta idazten ez dakienik. Baina ezagutu ditugu gure aita-amamen garaikoak, beste batek idatzitakoaren azpian hatz-marka jartzen zutenak sinadura modura. Eta entzun ditugu eskutitza idazteko lagun batengana jo behar zuen soldaduarena eta abadeari eskutitza irakurtzeko eskatu behar zion amarena. Batari idazten eta besteari irakurtzen laguntzen ziotenek beren esku zuten hitzak hartu zituzten bezala ematea edo nahi zuten eran aldatzea. Norberak irakurtzen eta idazten ez jakiteak besteenganako menpetasuna sortzen zuen.

Aspaldi ulertu zuen hori gizarteak mundu aurreratuan, eta aspaldiko helburua da ume guztiak eskolatik pasatu eta

alfabetatzea. Eta eskolak bertatik pasatzen denari utzi behar dion ondare minimoan matematikaren oinarriak datoz letrekin batera, eta hori, Unescoren adierazpenak zioen moduan, «bai matematikaren oinarrizko kontzeptuen ulermererako, bai pentsaera razionalaren garapenerako». Ez da lan makala eskolari eskatzen zaiona.

Irakurtzen jakitea ez da letrak elkarrekin josten ikasi eta hitzak ondo ematea bakarrik. Hori baino gehiago ere bada: irakurritakoa ulertu egin behar da. Azken aldian, PISA txostenaren haritik, kezka hori zabaldu da: ikasle askok ez dute ulertzen irakurritakoa. Zenbakiak ezagutu eta gero, eskolako matematikaren lehen lana «lau erregelak» irakastea izan da. Letrekin bezala, zenbakiekin ere, horien arteko eragiketak egiten jakiteaz gain, noiz zer egin eta zertarako jakin behar da. Hau da, ulertu egin behar da. Jesus Altunak bere ume garaiko Berastegiko eskolaz haxe kontatzen digu:

Hartaz arduratzen zen maisua kanpora bidali zuten eta kanpotik euskararik batere ez zekien beste bat iritsi zitzaigun. Lau erregelak, orduan ohi zenez, kantatzen ikasi genituen, baina matematikako problemetan sartzean hasi ziren arazoak.

Ulertzen ez genuen testu batean, bi zenbaki ikusten genituen. Lehenbizi batu egiten genituen. Maisuaren mahaira hurbildu eta hark «bien» edo «mal» esaten zigun. Bietariko lehena bazen, kontent itzultzen ginen, ongi egin bagenu bezala, hura asmatze hutsa besterik ez zelarik. «Mal» esaten bazigun, negarrez itzultzen ginen, gure artean esaten genuela: «Erresta in beharko yu». Zenbaki handiari txikia kentzen genion, eta berriro zoria aldekoa ote genuen probatzera. «Mal» hura, hala bazegokion, gogorragoa zen. «Multiplicar izango dek», eta oroitzen naiz «multiplicar» hitza astiro esaten genuela, berria baitzen guretzat, eta hura ahoskatzeko kontuz ibili beharra zegoen. Horrela ere ez izatera, haserre itzultzen ginen esaten genuela: «Maixu bizar aundi onekin etzeok asmatzeik. Dibidir dek». Batzuetan aurrenekoan asmatzen genuen, bestetan bigarreanean edo are laugarrenean ere.³

Berastegiko eskolako ume euskaldunek testua ulertu ez eta bi zenbaki ikusita eragiketak egiten hasten ziren maisuaren onspena izan arte. «Lau erregelak» jakin arren, zenbat ikasle ez da orain ere gelditzen zer egin ez dakiela pro-

blema baten aurrean? Ulertzeko arazoak ez baitatoz hizkuntza aldetik bakarrik... Baten batek uste izango du eskola denborara mugatzen den arazoa dela, irakasleak eskatzen dituen ariketa horiek nola edo hala gainditu eta gero, bizitzak ez diola berriro halakorik eskatuko.

Desagertu dira gure kaleetatik kontuak eskuz eta paper muturretan egiten zituzten dendariak. Tabernariak ere gutxitan esaten digute zenbat ordaindu behar dugun makinari kontua egiteko eskatu gabe. Eta makinak zintzo erantzuten die, bueltarako zenbat eman behar diguten ere. Gainera, denok sinesten omen dugu makinak dioena; ikusi duzue norbait supermerkatuko kontua berregiten eta egiaztatzen? Baten batek lau erregelen beharra bera ere zalantzan jarriko du agian.

Bai, makina batek egin ditzake kalkuluak gure ordeztu, okertu barik eta arinago, baina esan behar diogu zer nahi dugun egin dezan. Bizitzan baditugu kalkuluak eskatzen dituzten egoerak, onerako edo txarrerako diruari lotuta gehienbat. Telefonoaren, uraren eta argiaren fakturak, prezio bati BEZa gehitzea edo kentzea, komisioen kalkulua, eta abar, izan daitezke errazenetakoak. Errenta-aitorpena egitea apur bat zailagoa da. Beste kasu batzuetan hainbat faktore kontuan hartuz konparazioak egin behar dira. Adibidez, telefono-konpainiek eskaintzen dituzten produktuen artean edo bankuek hipoteketarako jartzen dituzten baldintzen artean. Guztiz ezjakinak bagara eta beste bati laguntza eskatu behar badiogu, hor dago menpetasuna berriro, oharkabean pasatzen bazaigu ere. Ez dut esaten aholkua eskatzea txarra denik, baizik eta aholkuaren zergatia ulertzeko eta eztabaidatzeko gauza izan beharko genukeela, eta horretarako zenbaki artean moldatzen jakin beharko dugula.

Bestalde, garai modernoek informazio-gizartera sartu gaituzte. Zenbakiak inguratzen gaituzte, behar denean eta behar ez denean. Kirola, politika, zer esanik ez ekonomia, zenbakien bidez ematen digute dena. Egunkaria zabaldu eta erraz topatuko ditugu zenbakiak dakartzaten berriak, noi-

zean behin taulak eta grafikoak lagun dituztela. Ez dirudi pertsona eskolatuari asko eskatzea denik prestatuta egotea egunkaria irakurtzen duenean deseroso ez sentitzeko. Lau erregela soiletik harantzago, informazioan estatistika eta probabilitatea sar daitezke datuen tratamendurako. Gehienetan horien erabilera arruntak oztopo matematiko gutxi du eta eskarmentua eta sen ona aski izan daitezke.

Hauteskunde batzuk joan berri dira eta ez da asko faltako beste batzuk etortzeko. Politikariek beren mezuetan, txostenetan, kanpainetan, zenbakiak dantzan jartzen dituzte, haiek dena argitzen dutelakoan. Edo iluntzen, batek daki. Hauteskunde aurretik iritzi-azterketak, ondoren emaitzen interpretazioa, galdu duena irabazle, irabazi duena galtzaile agerrarazi nahi, zenbakien dantza interesatuak ezin dira besterik gabe sinetsi, interpretatu egin behar ditugu, baina geuk, ez beste batek.

«Zenbakiak eta estatistikek interpretazioa eskatzen dute beti» da, hain zuzen ere, John Allen Paulos-ek dioena ZIO bildumak euskaraz argitaratu duen *Zenbakirik gabe bizi* liburuan⁴. Haren moduan beste batzuk ere saiatu dira mezu bera ailegarazten, hau da, analfabetismo matematikoa oztopoa dela informazioaren munduan eroso sentitzeko. Matematikaren erabilera okerretik ondorio faltsuak atera daitezke, edo informazio okerra helarazi hartzaileari. Batzuetan intentzio txarrik gabe, beste batzuetan engainatzeko asmoz.

Kirola ezin hobea da zenbakiak dantzan jartzeko. Adibidez, futbol-liga amaitzean denean behin eta berriro agertzen da «matematikoki» hitza kirol-informazioan. Halako taldea «matematikoki bigarren mailara jaitsi da», beste hura «ez da oraindik txapeldun matematikoki». Matematika da epaile eta berak erabakitzen du talde bat bigarren mailara doan edo ez (nahiko lukete askok matematikari errua bota eta ez taldeko jokalariei!). Matematika gutxi —batuketak eta kenketak gehienez ere— daude «matematikoki» horren atzean eta terminoa halabeharrekina lotzen da: gertatzen dena gertatzen dela ere, taldea jaistearena edo txapeldun izateare-

na erabakita dagoela. Beste kontu larriago bat da —matematikatik ikusita— partida gutxiren faltan egunkariak aurkeztu ohi dituzten probabilitate-kalkuluak: A taldeak bigarren mailara jaisteko edo B taldeak txapeldun izateko dituzten probabilitateak ematen dizkigute, itxura matematikoz eta zenbaki ugarien ondotik. Kalkulu horiek jatorrizko bekatu bat dute: partida bakoitzerako hiru gertaera onartu (irabazi-berdinu-galdu) eta bakoitzari $1/3$ probabilitatea esleitzen zaio. Ez da asko pentsatu behar ulertzeko hiru gertaera horiek ez direla probabilitate berekoak⁵, baina kazetariari orrialdea betetzeko balio dion bitartean...

Azken probabilitate-kalkulu horren antzera, komunikabideetan erabiltzen den matematika aipatzean akatsak erakusten ditugu askotan adibide gisa. Eman dezake kazetariak txarto ezkontzen direla matematikarekin eta zenbakien munduan sartzean beti oker dabiltzala. Egia da begi kritikoa rentzat notizia ez dagoela ondo emandako informazioan, txarto emandakoan baino (ez zen horren antzekoa kazetaritzaren lege bat?), baina okerrak nahi baino gehiagotan ageri dira. Eta ez da seinale ona, izan ere, Joxerra Garziak bere ikasleei buruz kontatzen duena⁶, kontuan izanda ikasle horiek EHUko Gizarte eta Komunikazio Zientzien Fakultatekoak direla:

Aiton-amona gehienak ordenagailuarekin nola, halatsu moldatzen dira unibertsitateko nire ikasleak zenbaki eta eragiketa matematikoekin.

Egia esan, ehunekoak ateratzera mugatzen da nik ematen dudan ikasgaian erabili beharreko matematika, baina hala ere. Beren burua zurrizteko, honako aitzakia hau erabiltzen dute:

— Letrazkoak gara gu.

Behin, bi kopuru elkarrekin alderatzen ari ginela, bata bestearen %300a zela jakinarazi nien. Barrez hasi zitzaizkidan ikasleak:

— Hori ez da posible. Ehunekoak ezin du ehun baino handiago izan.

«Letrazkoa» izatea ehunekoekin okerrak egiteko aitzakia bada, alferrik etorkizuneko berri-emaelek zenbakiekin zortzoko jokatu dutelako esperantza.

Joan den abenduan Espainiako ekonomia-egunkari batek burtsako zenbait balorek urtean zehar izandako galerak aztertu zituen. Ez dakit Joxerraren ikasle ohia izango zen kazetaria baina bistan da ondo ikasi zuela ehunekoa 100 baino handiago izan daitekeela: galerarik handiena %1315koa zen, bigarren galerarik handiena %639koa, eta beste hamairu baloreren galerak ziren %100etik gorakoak. Irakurleak egin dezala bere kontua: 75 euroko maximotik hasita %1315 galdu omen zuen balore hura, zenbatean gelditu zen? Kazetariak ez omen zekien 20tik 100era igotzea %400 irabaztea dela, baina 100etik 20ra jaistean %80 galtzen dela eta ez %400. Galeran bai, ehunekoa ezin da 100 baino handiago izan!

Adibideekin luzatzen ibili gabe, beste bat bakarrik ekarriko dut hona, duela gutxi egunkarian irakurria. Titularrak honela zioen: «Katalan gehienek bozkatuko lukete Espainiatik bereiztearen alde». Inkesta baten emaitzatik ateratako ondorioa zen eta testua irakurrita jakingo genuen galdetutakoen %36,5 egongo lirатеkeela independentziarekin ados. Aurka gutxiago ziren, egia da, baina ez du horrek katalanen heren bat «katalan gehienak» bihurtzen.

Simón Abrilen iritziz, matematikak dakartzan onuren artean «habituar los entendimientos de los hombres en buscar en las cosas la verdad firme y segura» dago. Honela itzul dezakegu gaurko egoerara: zorroztasunez jokatzeko jakin eta, Allen Paulosen aholkuari jarraituz, zenbakiak interpretatu eta norberaren ondorioak ateratzeko gauza izan. Bide batez, jarrera hori jendearen artean zabalduko balitz, ez lukete saszientziek arrakasta handirik izango.

Matematika denon onerako

Baliteke irakurleak ez behar izatea horren azalpen luzea oinarritzko matematikaren probetxua onartzeko. Jakingo du ziur aski matematikak hori baino askoz eremu zabalagoa hartzen duela eta gogoratuko ditu, haietatik pasatu bada,

polinomio, deribatu, integral, eta batek daki beste zenbat termino, matematikarien jostailu, ikasleen buruhauste, mundu errearekin zerikusirik ez dutenak. Edo bai?

Greziarrek matematika baliatu zuten zeruak eta Lurra deskribatzeko. Keopsen piramide handiaren garaiera ezagutzeko edo planeten ibilbideak emateko, matematika izan zuten lagun. Lehen problemak arazo gutxi du, baina bigarrenako oso sistema sofistikatua landu zuen Ptolomeok bere unibertso geozentrikoak behartuta. Matematikaren erabile-ra praktikoaren adibide bi baino ez dira, askoren artean.

Hamalau mende geroago, zientzia modernoaren sortzaile izan zen Galileo Galileik matematika ezinbestekoa ikusi zuen unibertsoa ulertzeko:

Filosofia gure begien aurrean beti zabalik dagoen liburu horretan dago idatzita —unibertsoan, alegia—; ezin da ulertu, ordea, aurretik haren hizkuntza ikasi eta idatzita dagoen alfabetoa ezagutzen ez bada. Eta matematikaren hizkeran dago idatzita, karaktereak triangeluak, zirkuluak eta beste irudi geometrikoak izanik, horiek barik berba bat bera ere ulertzea ezinezkoa gertatzen da; horiek barik labirinto ilun batek noraezean ibiltzea baino ez da lortzen.⁷

Galileo hil zen urte berean (1642) jaio zen Isaac Newton, eta Galileok amestu ere ezin zezakeen zentzua eman zien Newtonek haren hitzei. Galileok matematika unibertsoa deskribatzeko behar bazuen, Newtonek unibertsoa azaltzeko eginkizuna eman zion. Ez da alde txikia. Hori ahalbidetzeko mekanikaren eta grabitazio unibertsalaren legeak eman zituen eta ekuazio diferentzial bihurtu zituen higiduren deskripzioak. Ekuazioak eta horiek ebazteko metodoak ez zeuden artean matematikaren eskura eta hor ere Newtonen ekarpena dugu: kalkulu infinitesimala sortu zuen, Leibnizekin konpartitu behar duen ohorea. Hazia jarrita, hurrengo mendeetan etengabeko garapena etorri zen eta gaur egun nekez uler daitezke fisika eta beste zientzia esperimentalak eredu matematikorik gabe.

Horra non mundu errearen estudioa ez izan arren matematikaren helburua, ezinbesteko laguntza suertatu zen har-

taz ari diren zientzietarako. Eugene Wigner fisikariak azaldu zuenez,

matematikak naturaren zientzietan duen izugarritzko erabilgarritasuna misterioaren muga dago eta ez du azalpen razionalik. [...] Matematikaren hizkera fisikaren legeen formulazioetara egokitzearen miraria opari liluragarria da, ez dugu ulertzen eta ez dugu merezi.⁸

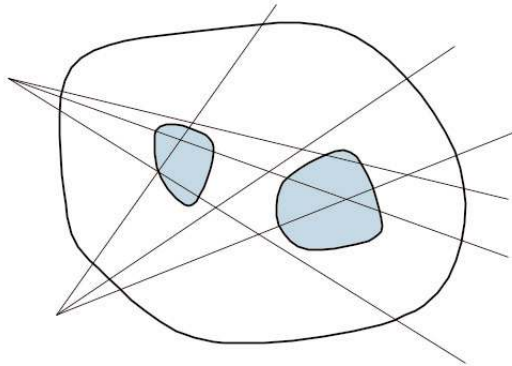
Matematika fenomenoak deskribatzetik aurreratera pasatu zen. Gertaera baten eboluzioaren eredu matematikoa da ekuazioa eta hura ebatztean dakigu zer gertatuko den. Horrela erabaki zezaketen adituek, esate baterako, zein bide egin behar zuen Galileo zundak Lurretik irten eta handik sei urtera Jupiterrera ailegatzeko. Eta ez ziren okertu, esandako egunean han zegoen, Jupiterren alboan.

Ikuspegi berri hark unibertsoa eta natura ulertzeko aldaketa sakona ekarri zuen. Fenomenoa gobernatzen duen ekuazioa edo ekuazio-sistema aurkitu eta matematikaren bidez aztertzeak ez zuen eztabaida filosofikoarekin zerikusirik. Elektrizitateari eta magnetismoari buruzko berba merkeak alferrekoak ziren Maxwellek ekuazioen alboan. Metodo aldaketa horretan kokatzen dute batzuek «bi kulturen» arteko aldentzea, filosofoek arlo teknikoan sartzeari uko egin baitzioten.

Zientzia esperimentalen arloan analisi matematikoaren beharra ukaezina da apur bat arakaturaz gero. Baina gaur egungo mundu teknologikoan matematikaren beste zenbait ataletara hedatu da erabilgarritasuna, ez dira bakarrik ekuazio diferentzialak agertzen. Adibide asko ekar daitezkeen arren, bereziki gustukoa dudana bat aipatuko dut hemen.

1917an Johann Radon-ek, Vienan lan egiten zuen matematikari bohemiarrek, teorema hau frogatu zuen: planoan definituriko funtzio bat erabat berreskuratzen da lerro zuzen guttien gainean egindako integralen bitartez. Eta berreskuratze-ko formula (bat) eman zuen. Iluna izango da Radonen baieztapen hori kontzeptuak ulertzen ez dituen irakurlearentzat. Adibide batekin saiaturiko naiz azaltzen zer esan nahi duen.

Eman dezagun multzo bat dugula planoan eta zenbait zulo dituela barrualdean, irudian ikusten den bezala. Guk paperari kanpotik begiratzen diogunez, zuloak non dauden eta zelakoak diren ikusten ditugu. Paperetik irten ezin den inurri batek, kanpoko muga zeharkatu ezean, zelan jakin dezake zuloak daudela? Zelan haien forma eta kokalekua? Egin dezagun lerro zuzen bat eta neurtu dezagun multzoa ebakitzean ematen duen luzera (ez ahaztu zuloetan ebakitakoa ez dela kontuan hartzen); gero gauza bera egingo dugu beste zuzen guztiekin. Radonen teoremaren arabera, luzera horien guztien zerrenda ezagutuz gero, barruko zuloen forma eta kokalekua erabat zehaztuta daude. Radonen emaitza teorikoa da eta ez zion berak aplikazio praktikorik ikusi —ez dirudi inurriek arazo horiekin kezkatuta egon behar dutenik behintzat—.



Berrogei urte geroago Allan Cormack fisikari hegoafrikarra Lurmutur Hiriko ospitale batean ari zen lanean, erradiologia sailean. Han konturatu zen X izpiek ibilbide bat egiterakoan zeharkatutako materialaren dentsitatearen arabera galtzen dutela intentsitatea eta ibilbideko puntu biren arteko intentsitate-galerak dentsitatearen integrala ematen duela formula erraz baten bidez. Izan zezakeen horrek aplikaziorik erradiologian? Cormackek bide bat ikusi zuen.

Eman dezagun pertsona baten bekokitik pasatzen den plano birtual batek burua ebakitzen diola. Burua benetan ebaki ezean —eta ahal dela hobe ez egin—, guk sekzioaren muga ikusten dugu, inguruan duen lerroa, lehenago aipatu dugun inurri haren moduan. Eta medikuari barrukoa interesatzen zaio. Cormacken ideia ederra hau izan zen: X izpiak norabide askotatik pasarazi, sarreran eta irteeran intentsitatea neurtu, datu horiekin dentsitatearen integralak lortu hainbat lerro zuzenen gainean eta integralekin dentsitatea ematen duen funtzioa berreskuratu. Radonen teorema bermatzen zuen bidea baina Cormackek askoz beranduago ezagutu zuen teorema hori eta bere kabuz aritu zen problema matematikoa ebazten. Radonen teorema mundu errealean aplikatzeko bide bat amestu zuen Cormackek baina artean teoria besterik ez zen.

Godfrey Hounsfield ingeniari ingelesak EMI (Electrical and Musical Instruments) etxean egiten zuen lan. Cormacken lana ezagutu gabe, berari ere bururatu zitzaion antzeko aplikazio bat eta, teoriatik harantzago joanez, 1968an ordenadore bidezko tomografia (*eskanerra*) burutzeko gauza izanago zen lehen makinaren patentea aurkeztu zuen. Tresna horrek posible egin zuen Cormackek amestutako aplikazioa. Lehen makina EMI enpresan eraiki zuten 1971n eta asko etorri dira haren ondotik. Orain, halako batean sartu eta barrutik «ikusten» gaituzte. Zuzenago esateko, gure barrualdearen irudi bat eraikitzen dute⁹. Medikuntza eta Fisiologiako Nobel saria irabazi zuten Cormackek eta Hounsfieldek 1979an.

Matematika, fisika eta teknologia, denak behar dira horrelako tresna bat asmatzeko. Ipuina horrela kontatuta ematen du matematikariak ideia abstraktu bat duela, mundutik hurbilago bizi den fisikariak aplikazioa asmatzen diola eta benetako munduan bizi den ingeniariak horrekin guztiarekin makina bat sortzen duela. Hori izan daiteke gertaeren ordena, edo beste bat. Batzuetan aplikazioak inori bururatu ez zaion problema batekin egiten du topo eta horren ondo-

rioz sortzen da azterketa matematikoa. Hau da, ikerketa elikatzen duen bideetako bat aplikazioa da.

Aurreko mendeko 70eko hamarkadan lehen eskanerra egin eta gero, bidea amaitu ordeztu hasi egin zen. Orduetik hona izugarri hedatu da irudi medikoak lortzeko ahalegina, eskanerrak aldatu egin dira eta metodo berriak sortu¹⁰. Eta ahalegin horretan berriro behar da matematikaren ekarpena. Oso argi adierazten du ideia hori hurrengo testuak:

Matematikari puru batzuen uste okerra da Radonen inbertsio-formula dela erantzun osoa berreraiketa tomografikoaren problemarako, eta ezer gutxi gelditzen dela egiteko. Aitzitik, lana hasi baino ez dela egin esaten badugu ez da ezustekorik izango matematikari aplikatu gehienentzat.¹¹

Besteak beste, matematika abstraktuak mundu errealerara jaisteko egokitze bat behar duela. Radonen teorema infinitu datu behar ditu eta mundu erreala datu kopuru finitu bat eman diezaike. Matematikak asmatu beharko du datu finituekin lan egiten, emaitza hurbilduak lortzen eta bizitza errealerako balio duen informazioa ematen. Wigner fisika-riaren hitzak parafaseatuz, miraria da zer ondo egokitu den.

Newtonekin iraultza bat etorri bazen matematika aplikatura, beste iraultza bat ordenadoreak ekarri zuen, duela berrogeita hamar urte inguru. Mundu errealeko matematikak behar dituen kalkulu hurbilduak izugarri handiak izan daitezke eta ezin daiteke pentsatu ere hori guztia eskuz burutzea. Eskanerra egiteko makina ezinezkoa izango zen ordenadorerik gabe. Arazoa ez da bakarrik milioika kalkulu egitearena, horretarako behar den denbora ere funtsezkoa gerta daiteke. Esate baterako, eguraldia iragartzeko erabiltzen den datu-kopurua itzel handia da eta eboluzioa aztertzeke erabiltzen diren eredu matematikoei lan ikaragarria eskatzen dute. Garrantzitsua da ordenadoreek lan hori oso arin egitea, alferrik izango baitzen biharko eguraldiaren pronostikoa etzi etorriko balitz.

Gaurko mundu teknologikoak oinarri matematikoei ditu. Euskuko telefonoa, CDen erroreak zuzentzeko kodeak, GPSa,

MP4a, interneten bidezko erosketa segurua, Googleren bilaketa, denek dute matematika atzean. Produktu teknologikoa ingeniariekin lotzen badugu ere, hura asmatzeko, diseinatze-ko, hobetzeko, oinarri zientifiko batzuk behar dira, matematika barne.

Guztion onurarako, batzuek prestakuntza matematiko sakona behar dute, zientzia eta teknologiaren eremuetan aritzeko. Simón Abrilek Felipe II.ari esaten zizkionak gogoratu, hemen ez badugu matematika (zientzia) dakien jendea presatzen, behar dugunean kanpora joan beharko dugu bila.

Matematika espirituaren ohorerako

Greziarrek sortu zuten matematika etengabe handituz joan da, astiroago garai batzuetan, askoz arinago azken hiru mendeetan. Jende askoren ustearen aurka, matematika ez da egin da dagoen zerbait, egiten ari den zerbait baizik. Egia da, hala ere, baduela «betikotasun» bat eta zirkuluaren koadratura ezinezkoa bazen duela ehun urte, ezinezkoa izango dela beti. Baina kontzeptuak sortu egiten dira, erlazioak asmatu, egiturak egokitu, eta arrazoibide berriak ekarri. Horrek guztiak kultur ondare handia utzi du, egunetik egunera handituz doana.

Asko da aplikazioetan erabiltzen den matematika, baina askoz gehiago oraindik matematikaren baitan mantentzen dena, inolako aplikazio praktikorik gabe. 1830ean Jacobi matematikari alemaniarrek hau idatzi zion Legendre frantsesari:

Egia da Fourier jaunak uste zuela matematikaren helburu nagusia erabilera publikoa eta naturaren fenomenoek azalpena dela, baina haren moduko filosofo batek jakin beharko zuen zientziaren helburu bakarra giza espirituaren ohorea dela eta, horren izenean, zenbakiei buruzko gai batek munduaren sistemari buruzko beste batek adina balio duela.

Giza espirituaren ohore horrek laburbildu du matematika puruaren helburua. Zientziaren aurrerapena galderak egitetik eta erantzutetik dator. Aplikazioen beharrak galderak

ekartzen dizkio matematikari, aipatu dugunez, baina askotan galderak bere baitatik sortzen ditu matematikak eta erantzunak ez dute inolako helburu praktikorik. Galdetu matematikari askori zergatik ebatzi nahi duten esku artean darabilten problema eta «hor dagoelako» erantzungo dute, George Mallory mendizaleak erantzun omen zuen moduan 1920ko hamarkadan Everest mendiaren igoerarekin zergatik tematu zen galdetu ziotenean.

Matematikaren objektuak abstraktuak direnez, kanpotik ikusten duenarentzat ulertezina da askotan ahalegin hori. Ez dut uste beste ikerlari batzuen motibaziotik asko aldentzen den jarrera denik, egia esateko. Jakin-mina dago galdera zientifiko askoren atzean, matematikakoak izan zein beste zientzietakoak, eta zientzialariak ez du beste arrazoi baten beharrik buruan bueltaka darabilkion galderari erantzuna bilatu nahi hori justifikatzeko. Beste gauza bat da kaleko jendeari, artikuluko honen irakurleari, kasurako, hori nahikoa iruditzen zaion.

Mendeetan zehar matematikak kulturari atal handi bat gehitu dio. Eta kultura deitu ohi dugun beste edozein arlok adina balio du. Egia da matematikaren irakaskuntzak berak ahazten duela askotan matematikaren izaera dinamiko hori, eta betidanik hor dagoen eta betiko hor egongo den altxor modura aurkezten dela. Horregatik agian Arkimedes, Fermat, Newton, Euler, Gauss, Cauchy, Riemann, Poincaré edo Hilbert, izen ezezagunak dira askorentzat, nahiz eta Brahms, Bach, Mozartek eta Beethovenek bezainbeste-ko ekarpena egin dioten gizateriari. Horiek eta beste asko agertzen dira ZIO bildumako *Loroaren teorema* eleberrian. Bertan Denis Guedj matematikari frantsesak istorio bat asmatu du, matematikaren kultur ibilbidea —emaitzak eta pertsonaiak— agertarazteko.

Zaila zaio gaurko matematika puruari komunikabideen arreta bereganatzea. Gailurra Fermaten azken teoremaren frogapenak lortu zuen, 1994an. Egunkarien lehen orrialdeetan agertu zen eta irrati eta telebistetan ere egin zioten le-

kua. Gero liburuak agertu ziren, dokumental bat telebistarako, bai eta musikal bat ere (*Fermat's last tango*). Enuntziatua erraza da azaltzen, baina hortik aurrerakoa oso teknikoa da. Alderdi tekniko guztia adituentzat utzi eta teorema osoa frogatzeraino heldu zen 350 urteko ibilbidea azaldu zen gehienbat. Ez da gutxi, hor ikusten baita hainbat pertsonen borroka, giza espirituaren ohorearen alde. Hori bakarrik dugu, beraz? Ez du gehiagorako balio? Aplikazio praktikoez ari bagara, ez, eta baliteke inoiz ez erabiltzea matematikatik kanpo, baina artelan ederra da, zinez.

Etengabe sortzen dira emaitzak matematikan, eta geroz eta orrialde gehiago betetzen dituzte aldizkari espezializatu-tuetan. Horietatik gutxi izango dira «historiarako» geldituko direnak, Fermaten teoremaren froga hori geldituko den moduan. Egon badaude, hala ere.

Gustatuko litzaidake emaitza moderno garrantzitsu bat aurkeztea. Zaila da, ur sakonetan sartu gabe, eta zenbaki lehenen laguntzarekin saiatuko naiz, oinarrizko kontzeptua delakoan. Gogora ekarriko dut zenbaki bat lehen dela txikiagoen biderkadura modura lortu ezin bada (adibidez, 13 lehen da, baina ez 28, hau 4 bider 7 eginez lortzen baita). Duela hogeita lau mendetik hona ezagutzen da zenbaki lehenen zerrenda infinitua dela. Euklidesen *Elementuak* liburuak dakar hori, zenbaki lehenen beste hainbat propietate-rekin batera, baina gaur arte aurreratu den guztiarekin ere urrun gaude zerrendaren propietate guztiak ulertzetik. Paul Erdős matematikari hungariarrak honela adierazi zuen: «Milioi bat urte joango dira, gutxienez, zenbaki lehenak ulertu baino lehen».

Joko bat dirudien galdera egingo diot irakurleari: aurkitu zenbaki lehenen progresio aritmetikoak. (Zenbaki segida bat progresio aritmetikoa da bakoitzetik hurrengora dagoen aldea beti berdina bada.) Hiru gaiko progresioak erraz aurkitzen dira: 3, 5 eta 7, adibidez; bost gaiko bat ere badago zenbaki txikien artean: 5, 11, 17, 23 eta 29. Pazientzia behar da, eta agian zerbait gehiago, seiko bat aurkitzeko. Matema-

tikariarentzat galdera konturatu gabe dator: nahi bezain luzeak izan daitezke zenbaki lehenen progresio aritmetikoak? Hots, aukeratu zenbaki bat, 65, adibidez; egon daitezke 65 zenbaki lehen progresio aritmetikoan?

Zenbaki lehenen taula, pazientzia asko eta ordenadore bat hartuta beharbada, halako zerrenda bat aurkituko duzula uste izango duzu agian. Bada, gal dezakezu esperantza, inork ez baitu horren progresio luzerik ezagutzen. Badakigu, hala ere, egon badaudela. Ordenadoreen nahitaezko laguntzaz hogeita lau gaiko progresioak lortu dira zenbaki lehenen artean, hamasei zifrako zenbaki batean hasita! Luzeagoak ere egon badaudela esan dut, zergatik? Duela lau urte bi matematikari gaztek, Ben Green britainiarra eta Terry Tao australiarra, hala dela erakutsi zutelako: zenbaki lehenen artean nahi ditugun besteko luzera duten progresio aritmetikoak daude. Haien frogak existentzia ematen du baina ez eraikibiderik. Badakigu beraz 65 gaiko progresioak daudela zenbaki lehenen zerrendan, baina ez dugu bat ere ezagutzen. Oso teorema ederra iruditzen zait neuri. Baliteke irakurlearengan ez sortzea aparteko zirrarak, noski.

Zertarako balio du Green eta Taoren teoremak? Berriro ere «giza espirituaren ohorerako» esan beharko dugu, Jacobirekin batera. Etorkizunak ekar diezaioke aplikazioen bat? Teoremak duen alderik ederrenari ez dut uste. Orain imajinatu ezin dugun zirrikituren batetik zenbaki lehenen progresioei aplikazioak aurkitzen bazaizkie ere, progresio zehatzei emango lieke eta ez existentziazko teorema bati. Aplikazio faltak ez dio artelanari inongo baliorik kentzen, jakina.

Matematikak ez du denetarako balio

Zenbait zientzian matematikak izan zuen arrakasta kontuan izanik, beste batzuek ere hara jo zuten. Orain edozein produkturen onurak edo merituak aldarrikatzeko erabiltzen den «zientifikoki frogatua» leloaren antzera, «matematikoki bermatua» labela nahi izaten dute batzuek beren lanetarako,

horrek automatikoki onespena dakarrelakoan. Baina bistan da ezin daitekeela gauza bera izan eguraldiaren pronostikoa egitea edo burtsarena. Euria egingo duela esateak ez du atmosferan eraginik; burtsa jaitsiko dela esateak bai eragin liezaioke bilakaerari, inbertsoerek horren arabera estrategia berriak planteatuko lituzketelako. Pertsonak hartu behar dituzten erabakiak tarteko izanik, gizarte zientzietan matematika erabiltzen bada, «interpretazioa behar du beti», Allen Paulosen abisua errepikatuz.

Aspaldi hasi zen matematika ekonomian agertzen. XIX. mendeko Stanley Jevons ekonomilariak hau idatzi zuen: «argi dago ekonomiak, benetan zientzia izango bada, zientzia matematikoa izan behar duela». Eta XX. mendearen bigarren zatiko garapenaren ondoren, gaur egun asko erabiltzen da matematika ekonomian, goi-mailako matematika barne. (Esan dezadan, bidenabar, ez dagoela Matematikako Nobel saririk, baina badaudela zenbait matematikari Nobel saridunen artean, Ekonomiako saria irabazita gehienak.) Tentuz ibili behar bada ez da eredu matematikoak emaitza okerrak eman ditzakeelako, ereduari esanarazi nahi zaiona oker egon daitekeelako baizik. Esate baterako, estatistika erabiltzen badugu bizi-kalitatea neurtzeko, horretarako diseinatzen dugun estudioaren arabera izango dira emaitzak esanguratsuak edo ez, matematikaren ardura kalkuluak ondo egitera mugatzen da. Ekonomialarien artean ere aurki dezakegu zuhurtasun eske dabilenik:

Fama handiko ekonomialari eta nazioarteko analista Paul Krugman estatubatuarrak dioen bezala, ekonomiari buruzko aldizkarietan gehiegizko matematika saioa dago, izan ere elaborazio matematikoa «ideia hutsal bat moztzeko modu tradizional bat da»; are gehiago, «izen oneko ekonomialaria izanik, erabat gai naiz inork uler ez ditzakeen gauzak idazteko», dio bere ohiko ironiaz.¹²

Ez dezala inork ulertu giza- eta gizarte-zientzietan matematika ezin erabil daitekeenik. Askok erabiltzen da, geroz eta gehiago, bai eta ondo erabili ere sarritan. Ez beti, ordea, eta hori da Krugmanekin salatzen duguna.

Egia da matematika-mozorroz janzten direla zenbait lan? Bai, noski. Ez matematikaz bakarrik, beste zientzia batzuetako kontzeptuak ere erabiltzen dira zientifikoa ez den zerbaiti itxura emateko. Oso ezaguna egin zen *Sokal afera* eta merezi du haren ondotik etorri zen *Impostures intellectuelles* liburua irakurtzea, Paul Krugmanen mehatxua («gai naiz inork uler ez ditzakeen gauzak idazteko») praktikatu duten zenbait filosofo agerian uzten baititu. Ez dute horregatik horiek aitortuko zientziaren ukitua mozorro hutsa denik, noski.

Adibide bat *Berria* egunkarian agertu zen duela urte batzuk. Danièle Moatti-Gornet filosofo frantsesak *Qu'est-ce qu'une femme?* (L'Harmattan, 1999) liburuan hau egin omen zuen:

teoria ontologikoa garatu du matematikaren laguntzaz, baina Lacanen kategorien matematikari kontrajarriz, Cantor-en teoria conjuntista erabili du [...].

Emakumearen numerizitateaz mintzatu zaigu (1 edo desiratu, ∞ edo erabaki eta $-\infty$ jakitea erabaki) [...] liburu honetan plazera infinitu destotalizatua da (Dedekind-en definizioaren arabera) [...] $-\infty$ sinboloa, azkenik, jakituriaren eta arriskuaren sinboloa da [...].¹³

Zailena ez da hori idaztea —gogoratu Krugmanen mehatxua berriro—, hor zentzuzko zerbait atzematea da benetan zaila, Cantorren multzo-teoria eta Dedekinden infinituaren inguruko lanak ezagutu zein ez.

Azken hitza

Matematika zertarako den galderari erantzuten saiatu naiz. Askotarikoa da eta batzuetan beharrak, beste batzuetan jakin-minak ematen diote zentzua matematikari. Aipaturiko arrazoiak laburbilduz lau puntu hauek azpimarratuko nituzke:

1. Gaurko gizartean bizitzeko oinarrizko matematika nahitaezkoa da. Esaldiari buelta emanez, oinarrizko mate-

matika da gaurko gizartean bizitzeko behar dena. Derri-
gorrezko hezkuntza amaitzean ikasle guztiei eskatu be-
harko litzaieken maila minimoa da.

2. Maila minimoa izateak ez du esan nahi hortik gorako prestakuntza eskaini behar ez denik. Ikasle multzo batek aise gainditu beharko luke maila minimo hori eta pres-
takuntza sakonagoa hartu, geroz eta arlo gehiagotan era-
biltzen baita matematika, zientzia eta teknologian batez
ere. Gazteen aukeretan beheranzko joera duten karrerak
izan arren, beharrezkoak dira gizartearen aurrerapene-
rako, eta eskolatik hasten da hori bideratzen.
3. Batzuk ofizioz eta beste batzuk afizioz atseginez arituko
dira matematikak eraiki duen mundu abstraktuan, hel-
buru praktikoaren ardurarik gabe.
4. Matematika baliatzean zintzotasunez jokatu, ez erabili al-
ferrik, eta are gutxiago «ideia hutsal bat mozorrotzeko».¶

1. Euskarazko edizioa: Luis Sepúlveda, *Maitasun elaberriak irakurtzen zituena agurea*, Txalaparta, 1997; itzultzailea: Ane Santos Elorza. Edizio horretatik dago hartuta testuko itzulpena.
2. P. Simón Abril, *Apuntamientos de cómo se deben reformar las doctrinas y la manera de enseñarlas para reducir las a su antigua entereza y perfección; de que con la malicia del tiempo y con el demasiado deseo de llegar los hombres presto a tomar las insignias de ellas han caído, hechos al Rey Nuestro Señor por el doctor Pedro Simón Abril*, 1589. Argitalpen berri baterako, ikus P. Simón Abril, *Textos de Humanismo y Didáctica*, Clásicos Albacetenses, 6, Diputación de Albacete, 1988. Beste aldaketa batzuen artean, eskolak gaztelaniaz («en lengua vulgar») ematearen alde zegoen; haren ustez, irakaskuntza latinez ematea, ikasleek latina ondo jakin gabe, kaltegarria zen.
3. Jesus Altuna, «Historiaurrea», in *Euskal Curriculum. Adituen Ekarpena*, Ikastolen Konfederazioa, 2004, 540. or.
4. Jatorrizko izenburua *Innumeracy* du, analfabetismorako ingelesez erabiltzen den «illiteracy»-ren erara moldaturiko berba. Horrek letra-gabezia adierazten badu, hark zenbaki-gabezia adierazi nahi du.
5. Pilota-partidetako apustuetan ondo ulertzen da hori. Bi emaitza daude, irabazi edo galdu, baina ez dira probabilitate berekotzat hartzen. Apustuak onartu egiten du (eta nolabait baloratu) pilotari batek irabazteko probabilitate gehiago duela.
6. Joserra Garzia, «Kurrin-kurrin vitae», Alberdania, 2004, 151. or.
7. Galileo Galilei, *Il Saggiatore*, Erroma, 1623.
8. E. Wigner, «The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences», *Comm. Pure Appl. Math.* 13 (1960), 1-14.
9. Erradiografia arruntak argazki baten moduan funtzionatzen du, X izpiek egiten dute argiaren lana. Argazkien arazo batzuk ditu, ostean dagoena ez dela agertzen, adibidez. Eskanerrak aldiz, datuak bildu eta horiekin dentsitatearen funtzioa eraikitzen du. Ez dago X izpien bidezko argazkirik.
10. Ikus X. Artaetxebarria, «Ordenagailu bidezko diagnostia: ordenagailuak mediku?», *Elhuyar. Zientzia eta Teknika* 241 (2008), dossierra, 26-31.
11. L. A. Shepp eta J. B. Kruskal, «Computerized Tomography: The New Medical X-Ray Technology», *Amer. Math. Monthly* 85 (1978), 420-439.
12. Iñaki Heras, *Txanponaren bi aldeak*, Alberdania, 2003.
13. L. Mintegi, «Ustez sinplea den galdera», *Berria*, 2003-08-21.